§2.2 点与集合的关系

Def. $E\subset\mathbb{R}^n$，若 $x_0\in\mathbb{R}^n$：

(1) 若 $\exists\, O(x_0,\delta)\subset E$，则 x_0 为 E~~中~~的内点，

(2) 若 $\exists\, O(x_0,\delta)$，$O(x_0,\delta)\cap E=\emptyset$，则 x_0 为 E 的外点，

(3) 若 $\exists\, O(x_0,\delta)$ s.t. $O(x_0,\delta)\cap E\neq\emptyset$，$O(x_0,\delta)\cap E^c\neq\emptyset$，
则称 x_0 为 E 的边界点.

Prop. E 和 E^c 的边界点相同.

Def. 若 x_0 的任一邻域内有无限多个点，则称 x_0 为聚点.

Thm. (1) x_0 是 E 的聚点

$\Longleftrightarrow$ (2) x_0 任一邻域内至少含 E 的两个点，

$\Longleftrightarrow$ (3) x_0 任一邻域内除 x_0 外至少含 E 的一个点，

$\Longleftrightarrow$ (4) E 中存在一点列 $\{x_n\}$ $(x_n\neq x_0)$ 收敛于 x_0.

$\Longleftrightarrow$ (5) E 中存在一互异点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0.

Rem. (1) 有聚点的集合一定是~~有~~无限集

(2) x_0 不是 E 的聚点 $\Longleftrightarrow \exists\, O(x_0,\delta)$ s.t. $O(x_0,\delta)$ 中除 x_0 外不含 E 中的点，($E\cap(O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\})=\emptyset$)

Cor. Bolzano-Weierstrass

$\mathbb{R}^n$ 中无限有界集至少有一个聚点，但 $\mathbb{R}^n$ 中不一定包含这个聚点.

Def. $x_0\in E$，若 $\exists\, O(x_0,\delta)$ s.t. 除 x_0 外无 E 中的点，则 x_0 为 E 的孤立点.

Def. E的边界点全体称为边界，记为∂E

E的聚点全体称为导集，记为E'

$E\cup E'$为E的闭包，记为$\bar{E}$.

Rem. $x_0\in\bar{E} \Leftrightarrow x_0$任一邻域中含有$E$的点

$\Leftrightarrow \exists E$中点列$\{x_n\}$收敛到$x_0$（$\{x_n\}$可以不互异）

Thm. $A,B\subset\mathbb{R}^n$, $A\subset B\Rightarrow A'\subset B'$, $(A\cup B)'=A'\cup B'$

$A\subset B\Rightarrow \bar{A}\subset\bar{B}$, $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

Def. B中任意点的任意邻域中都有A中点，则称A在B中稠密

Thm. A在B中稠密 $\Leftrightarrow B\subseteq\bar{A}$

例 $\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}^1$中稠密，$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}^1\backslash\mathbb{Q}$中稠密

$\mathbb{R}^1\backslash\mathbb{Q}$在$\mathbb{Q}$中稠密

Def. 不在任何集合中稠密的集合是疏朗的.

Def. 集合中每一点均为孤立点，称集合为孤立集